Лекция 4. Дифференциальные уравнения линейных САР и операторная форма записи

Уравнения, которые, кроме неизвестных функций одного или нескольких переменных, содержат также их производные, называются дифференциальными. Дифференциальные уравнения линейных САР описывают динамику САР и связывают входные и выходные переменные САР.

В общем виде дифференциальное уравнение для линейной САР имеет вид:

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0 y(t)=b_m\frac{d^m y(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}y(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_0 u(t)$$

В данном уравнений а и в - коэффициенты, y(t), u(t) - выходная и входная переменные соответственно.

Для удобства использования в теории управления используется операторная форма записи данного дифференциального уравнения. Для этого операцию дифференцирования, т.е дифференциалы заменяются оператором р.

$$(a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_0)y(t)=(b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_0 u(t)$$

Тема 4. Принцип составления дифференциальных уравнений для линейных САР, примеры

Дифференциальные уравнения элементов САР

Любая САР состоит из отдельных элементов, причем из-за воздействия возмущений каждый из элементов и САР в целом работают в неустановившемся, динамическом режиме. Поэтому для описания работы САР необходимо иметь дифференциальные уравнения всех ее элементов. Уравнения должны быть составлены так, чтобы они выражали связь между входными и выходными сигналами данного звена или системы. Составляется дифференциальное уравнение на основании тех физических законов, которые определяют протекание процесса в изучаемом элементе. Чаще всего исходным является закон сохранения вещества или энергии, записанный применительно к рассматриваемому явлению. Покажем это на примере вывода дифференциального уравнения объекта регулирования, в качестве которого примем резервуар со свободным стоком жидкости (рисунок 4.1).

В нем выходной величиной будем считать отклонение уровня ΔН от номинального H_0, т.е. $y=\Delta H$.

Входной величиной – перемещение регулирующего органа на притоке x[% х.р.о] – процент хода регулирующего органа. Возмущением (нагрузкой) объекта – перемещение клапана на стоке f[% х.к.с.] – процент хода клапана стока.

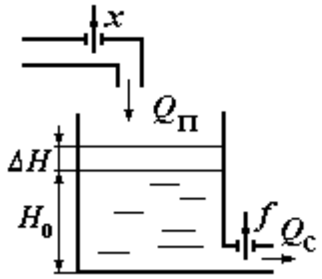

Рисунок 4.1

Если приток и сток жидкости в единицу времени равны друг другу, т.е. $Q_П$=$Q_С$, то уровень в резервуаре будет иметь некоторое установившееся значение H_0. Если возникает разница между притоком и стоком, существующая в течении времени Δt, то количество жидкости в резервуаре изменится на величину $(Q_П–Q_С)\Delta t$. Это, в свою очередь, вызовет изменение уровня в резервуаре на некоторую величину ΔH. Тогда уравнение материального баланса жидкости в резервуаре определится выражением

$$(Q_П\text{-}Q_С)\Delta t=S\Delta H, \tag{4.1}$$

откуда

$$S\frac{\Delta H}{\Delta t}=(Q_П-Q_С), \tag{4.2}$$

где S – площадь резервуара.

Переходя в (4.2) в пределе при $\Delta t\to 0$ к производной, получим:

$$S\frac{dH}{dt}=(Q_П-Q_С). \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует, что изменение уровня в любой момент времени пропорционально разности между притоком и стоком жидкости.

Приток жидкости зависит только от степени открытия клапана на притоке, а сток – от степени открытия клапана на стоке и величины уровня, причем эти зависимости нелинейные, в частности $Q_С=k\sqrt{H}$. Тогда можем записать, что $Q_П=f_1(x)$; $Q_С=f_2(f,H)$. Для получения линеаризованного уравнения резервуара представим эти зависимости в приближенной линейной форме в виде приращений от исходных равновесных значений путем разложения в ряд Тейлора. Тогда получим

$$\Delta Q_{П} = k_1 x, \tag{4.4}$$
$$\Delta Q_C = k_2 f + k_3 \Delta H, \tag{4.5}$$

где k_1, k_2, k_3 – коэффициенты пропорциональности.

Запишем уравнение материального баланса резервуара (4.3) в виде приращений его параметров от равновесных значений

$$S\frac{d(\Delta H)}{dt} = (\Delta Q_{П} - \Delta Q_C). \tag{4.6}$$

Подставляя (4.4) и (4.5) в (4.6), получим уравнение объекта в следующем виде

$$S\frac{d(\Delta H)}{dt} + k_3 \Delta H = k_1 x - k_2 f$$

Вводя принятые обозначения, получим

$$S\frac{dy}{dt} + k_3 y = k_1 x - k_2 f. \tag{4.7}$$

Из уравнения (4.7), разделив обе его части на k_3, получим окончательное дифференциальное уравнение резервуара со свободным стоком – его линеаризованную математическую модель.

$$T\frac{dy}{dt} + y = k_{ор} x + k_{ов} f, \tag{4.8}$$

где $T=S/k_3$[ед. времени] – постоянная времени объекта;

$k_{ор}=k_1/k_3$ [ед. длины/%х.р.о.] – коэффициент передачи объекта относительно регулирующего воздействия;

$k_{ов}=-k_2/k_3$ [ед. длины/ %х.к.с.] – коэффициент передачи объекта относительно возмущающего воздействия.

Из дифференциального уравнения (4.8) можно получить статические характеристики объекта. Для этого следует приравнять к нулю все производные, входящие в дифференциальное уравнение. Тогда из (4.8) найдем

$y_\infty=k_{ор}x + k_{ов}f$, где y_∞ – установившееся значение выходной величины. Откуда, в соответствии с принципом суперпозиции, получим

$k_{ор}=k_\infty/x$; $k_{ов}=y_\infty/f$, т.е. коэффициент передачи представляет собой отношение изменения выходной величины объекта к изменению входной в установившемся состоянии.

В заключение заметим, что:

1) Линейное дифференциальное уравнение (4.8) составлено в приращениях. Поэтому без указания исходного режима, в окрестности которого произведена линеаризация, это уравнение не имеет смысла.

2) В соответствии с принципом суперпозиции, для линейных систем можно раздельно определять реакцию выходной величины объекта на регулирующее и возмущающее воздействия. Поэтому в правой части уравнения (4.8) обычно записывают одно из этих воздействий, по каналу которого предполагают проведение исследования. Тогда, например, для канала управляющего воздействия уравнение (4.8) запишется

$$T\frac{dy}{dt} + y = k_{op}x$$

Таким образом, опираясь на вышеприведенные выводы, можно указать примерные этапы составления дифференциального уравнения любого устройства:

1) Выбираются определяющие координаты.

2) Физические переменные объекта выражаются через их абсолютные или относительные отклонения.

3) Определяется физический закон, лежащий в основе работы устройства. Математическое выражение этого закона является исходным дифференциальным уравнением рассматриваемого устройства.

4) Производится нормирование уравнения и определение размерности полученных коэффициентов.

Рассмотрим в качестве второго примера вывод дифференциального уравнения объекта, которым является резервуар постоянного сечения с выходным насосом, производительность которого не зависит от уровня жидкости в резервуаре (рисунок 4.2).

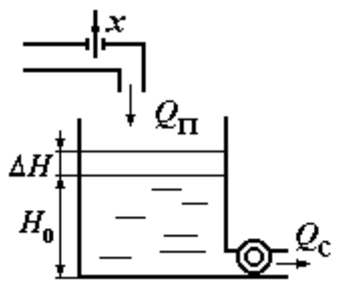

Рисунок 4.2

По прежнему будем считать выходной величиной отклонение уровня ΔH от номинального значения, т.е. $y=\Delta H$. Входной величиной – перемещение регулирующего органа на притоке, x [%х.р.о]. Тогда $\Delta Q_П=k_1x$. Возмущением (нагрузкой) – изменение производительности насоса f [% п.н]. Тогда $\Delta Q_C=k_2f$.

Используя уравнение материального баланса (4.6) запишем

$$T\frac{d(\Delta H)}{dt}=k_1 x-k_2 f$$

откуда, вводя принятые обозначения, получим

$$\frac{dy}{dt}=k_{op}x+k_{ов}f\ ,$$

где $k_{op}=k_1/S$[ед. длины/ед. времени %х.р.о] – коэффициент передачи объекта относительно регулирующего воздействия;

$k_{ов}=-k_2/S$[ед. длины/ед. времени % п.н] – коэффициент передачи объекта относительно возмущающего воздействия.